ENSA d'Al-Hoceima — Année 2019/2020
AP-I, Première Année, — Semestre 2
Algèbre linéaire, — TD2

Solutions de la Série N^{o}2 : Application linéaire, Endomorphisme et isomorphisme

Exercice 1

1. Montrer que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $E = \{(x, -x); \quad x \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(x, x); \quad x \in \mathbb{R}\}$ deux ensembles.
   (a) Montrer que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Solution :

1. Montrons que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$:
   i) $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe abélien, en effet
   - L'élément neutre pour la loi $+$ est $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$, alors $\mathbb{R}^2 \neq \emptyset$.
   - soit $X = (x, y)$ et $Y = (x', y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$, on a

   $$X + Y = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') = (\xi, \zeta)$$

   où $\xi = x + x' \in \mathbb{R}$ et $\zeta = y + y' \in \mathbb{R}$, donc $X + Y \in \mathbb{R}^2$.
   - Soit $X = (x, y)$ un élément dans $\mathbb{R}^2$, alors il existe $X' \in \mathbb{R}^2$ tel que $X + X' = 0_{\mathbb{R}^2}$, donc
   $X' = 0_{\mathbb{R}^2} - X = (0 - x, 0 - y) = -(x, y)$, d'où $X' = -(x, y)$ est l'opposé de X dans $\mathbb{R}^2$.
   - Soit $X = (x, y)$ et $X' = (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$, alors

   $$X + X' = (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

   or $x + x' = x' + x$ et $y + y' = y' + y$ dans $\mathbb{R}$ puisque $\mathbb{R}$ est un corps commutatif, alors

   $$X + X' = (x' + x, y' + y) = (x', y') + (x, y) = X' + X$$

   donc la loi $+$ est commutative.
   ce qui prouve que $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe abélien.

   ii) Soit $X = (x, y)$ et $X' = (x', y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

   $$\begin{aligned} \lambda.(X + X') = \lambda.(x + x', y + y') &= (\lambda(x + x'), \lambda(y + y')) \\ &= (\lambda x + \lambda x', \lambda y + \lambda y') \\ &= (\lambda x, \lambda y) + (\lambda x', \lambda y') \\ &= \lambda(x, y) + \lambda(x', y') \\ &= \lambda X + \lambda X' \end{aligned}$$

   car $(\mathbb{R}, \times)$ est un groupe commutatif, donc la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+\cdot$

iii) Soit $X=(x,y)$ un éléments de $\mathbb{R}^2$ et α et β dans $\mathbb{R}$, on a

$$\alpha(\beta X)=\alpha(\beta x,\beta y)=(\alpha\beta x,\alpha\beta y)=(\alpha\beta)(x,y)=(\alpha\beta)X$$

donc la loi $\times$ est associative pour la structure d'espaces vectoriels.

iv) l'élément neutre pour la loi $\times$ est 1, en effet

$$1.X=1.(x,y)=(1.x,1.y)=(x,y)=X$$

car $1x=x$ et $1y=y$

d'après i), ii), iii) et iv) on déduit que $(\mathbb{R}^2,+,\times)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Soient $E=\{(x,-x);\quad x\in\mathbb{R}\}$ et $F=\{(x,x);\quad x\in\mathbb{R}\}$ deux ensembles.

(a) Montrons que E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

i. E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ en effet,
- $E\neq\emptyset$ car $0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)=(0,-0)$ est un élément de E.
- Soit $X=(x,-x)$ et $X'=(x',-x')$ dans E, on a

$$X+X'=(x,-x)+(x',-x')=(x+x',-x-x')=(x+x',-(x+x')),$$

donc en posant $\xi=x+x'$ on a $\xi\in\mathbb{R}$ et $X+X'=(\xi,-\xi)\in E$,
d'où E est stable pour la loi $+\cdot$
- Soit $X=(x,-x)$ dans E et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a $\lambda X=\lambda(x,-x)=(\lambda x,-\lambda x)=(\zeta,-\zeta)$ où $\zeta=\lambda x\in\mathbb{R}$, d'où $\lambda X\in E$, c'est à dire que E est stable par la multiplication externe.

finalement E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

ii. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ en effet,
- $F\neq\emptyset$ car $0_{\mathbb{R}^2}=(0,0)$ est un élément de F.
- Soit $X=(x,x)$ et $X'=(x',x')$ dans E, on a

$$X+X'=(x,x)+(x',x')=(x+x',x+x'),$$

donc en posant $\xi=x+x'$ on a $\xi\in\mathbb{R}$ et $X+X'=(\xi,\xi)\in F$,
d'où F est stable pour la loi $+\cdot$
- Soit $X=(x,x)$ dans F et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a $\lambda X=\lambda(x,x)=(\lambda x,\lambda x)=(\zeta,\zeta)$ où $\zeta=\lambda x\in\mathbb{R}$, d'où $\lambda X\in F$, c'est à dire que F est stable par la multiplication externe.

finalement F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrons que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$:

i. Soit $X\in E\cap F$, alors $X=(x,x)$ et $X=(x,-x)$, donc $x=-x$ ce qui montre $x=0$,
d'où $X=(0,0)=0_{\mathbb{R}^2}$, d'où $E\cap F\subset\{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
Comme E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ alors $\{0_{\mathbb{R}^2}\}\subset E\cap F$,
d'où $E\cap F=\{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

ii. Soit $Y\in\mathbb{R}^2$, montrons que $Y=(y,y')=(x,-x)+(x',x')$.
On a $(y,y')=(x,-x)+(x',x')$, alors

$$\left\{\begin{array}{l} y=x+x' \\ y'=-x+x' \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}(y+y') \\ x'=\frac{1}{2}(y-y') \end{array}\right.$$

d'où $(y,y') = \left(\frac{1}{2}(y-y'), -\frac{1}{2}(y-y')\right) + \left(\frac{1}{2}(y+y'), \frac{1}{2}(y+y')\right)$,
soit $\mathbb{R}^2 = E + F$

d'après i) et ii) on vient de prouver que $\mathbb{R}^2 = E \oplus F$.

$\square$

Exercice 2

Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients réels.

1. Montrer que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On considère $E = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$
   (a) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   (b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que le système $\{I, J\}$ est une base de E où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (c) On pose $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R} \right\}$ et $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}; \quad b \in \mathbb{R} \right\}$.
   Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.

Solution : Considérons $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre 2 à coefficients réels.

1. Montrons que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :
   i) $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ est un groupe abélien, en effet,
   – soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors on a

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \sigma \end{pmatrix}$$

   où $\alpha = a + a'$, $\beta = b + b'$, $\gamma = c + c'$ et $\sigma = d + d'$ sont des réels, d'où $A + B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   – Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice nulle $0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour l'addition, ceci puisque

$$A + 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & b+0 \\ c+0 & d+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A.$$

   – Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors il existe B une matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A + B = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, en effet,

$$A + B = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \quad \Leftrightarrow \quad B = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} - A = \begin{pmatrix} 0-a & 0-b \\ 0-c & 0-d \end{pmatrix}$$

   d'où $B = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = -A$ est l'opposé de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour l'addition.

– Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors on a

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

Comme $(\mathbb{R}, +)$ est abélien, alors $a + a' = a' + a$, $b + b' = b' + b$, $c + c' = c' + c$ et $d + d' = d' + d$, donc

$$A + B = \begin{pmatrix} a'+a & b'+b \\ c'+c & d'+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = B + A$$

d'où $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ est abélien.

ii) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit λ un réel, alors on a

$$\begin{aligned}
\lambda.(A+B) &= \lambda.\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right] = \lambda \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(a+a') & \lambda(b+b') \\ \lambda(c+c') & \lambda(d+d') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \lambda a' & \lambda b + \lambda b' \\ \lambda c + \lambda c' & \lambda d + \lambda d' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda a' & \lambda b' \\ \lambda c' & \lambda d' \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \\
&= \lambda A + \lambda B.
\end{aligned}$$

donc la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$.

iii) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit α et β deux réels, on a

$$\begin{aligned}
\alpha(\beta A) &= \alpha.\left[\beta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \alpha \begin{pmatrix} \beta a & \beta b \\ \beta c & \beta d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha\beta a & \alpha\beta b \\ \alpha\beta c & \alpha\beta d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)a & (\alpha\beta)b \\ (\alpha\beta)c & (\alpha\beta)d \end{pmatrix} \\
&= (\alpha\beta) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\alpha\beta)A.
\end{aligned}$$

donc la loi $\times$ est associative dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

iv) Le nombre 1 est un élément neutre pour la multiplication dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, en effet, soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$1.A = 1.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.a & 1.b \\ 1.c & 1.d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A.$$

D'après i), ii), iii) et iv), on a prouvé que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. On considère $E = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}; \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

   (a) Montrons que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

   i) Comme $0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un élément de E, alors $E \neq \emptyset$.

   ii) Soit $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $M_{c,d} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ deux éléments de E, on a

$$M_{a,b} + M_{c,d} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b-d & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

   où $\alpha = a + c$ et $\beta = b + d$. Donc $M_{a,b} + M_{c,d} \in E$, d'où E est stable par la loi $+$ comme étant une loi interne.

   iii) Soit $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ un élément de E et λ un réel, on a

$$\lambda M_{a,b} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ -\lambda b & \lambda a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \sigma \\ -\sigma & \gamma \end{pmatrix}$$

   où $\gamma = \lambda a$ et $\sigma = \lambda b$. Donc $\lambda M_{a,b} \in E$, d'où E est stable par la loi $\times$ comme loi externe.

   D'après i), ii) et iii), E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ce qui montre que $(E, +, \times)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   (b) Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrons que le système $\{I, J\}$ est une base de E :

   i) Soit $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ un vecteur dans E, on a

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = aI + bJ$$

   donc le système $\{I, J\}$ engendre E.

   ii) Soit α et β des réels tels que $\alpha I + \beta J = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Montrons que $\alpha = \beta = 0$.

$$\alpha I + \beta J = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   donc $\alpha = \beta = 0$, ce qui prouve que le système $\{I, J\}$ est libre.

   d'après i) et ii) on a montré que le système $\{I, J\}$ est une base de E

   (c) On pose $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R} \right\}$ et $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}; \quad b \in \mathbb{R} \right\}$, montrons que $E = E_1 \oplus E_2$.

i) Soit $X \in E$ alors ceci est équivalent à dire qu'il existe a et b dans $\mathbb{R}$ tels que

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = aI + bJ$$

donc $X \in E1 + E_2$ car $aI \in E_1$ et $bJ \in E_2$, d'où $E = E_1 + E_2$.

ii) Soit $X \in E_1 \cap E_2$, alors $X \in E_1$ et $X \in E_2$, donc il existe a et b dans $\mathbb{R}$ tels que

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, d'où $a = b = 0$,

c'est à dire que $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$, soit $E_1 \cap E_2 \subset \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$, et comme E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $\{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\} \subset E_1 \cap E_2$, d'où $E_1 \cap E_2 = \{0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$.

d'après i) et ii) on a $E = E_1 \oplus E_2$.

$\square$

Exercice 3

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}; \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1. (a) Montrer que E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   (b) Trouver une base de E.
2. Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \to a + b$
   (a) Montrer que f est linéaire.
   (b) Déterminer Ker$f$, noyau de f.
   (c) Déterminer G le supplémentaire de Ker$f$ dans E.

Solution : Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}; \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1. (a) Montrons que E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$: L'ensemble E est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   i) $E \neq \emptyset$ car la matrice nulle $O_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un élément de E, il suffit de prendre $a = b = 0$.

   ii) Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}$ dans E, alors

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ 0 + 0 & a + a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

   où $\alpha = a + a' \in \mathbb{R}$ et $\beta = b + b' \in \mathbb{R}$, donc $A + B \in E$.

iii) Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ de E et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 0 & \lambda a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix}$$

où $\alpha' = \lambda a \in \mathbb{R}$ et $\beta' = \lambda b \in \mathbb{R}$, donc $\lambda A \in E$.

D'après i), ii) et iii) on a prouvé que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, d'où $(E, +, \times)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

(b) Une base de E :

– Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ un élément de E, on a

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $X = aI + bJ$ où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui prouve que le système $\{I, J\}$ engendre E.

– Montrons que le système $\{I, J\}$ est libre dans E : soient λ et γ deux réels tels que

$$\lambda I + \gamma J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{montrons que} \quad \lambda = \gamma = 0.$$

On a

$$\lambda I + \gamma J = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors $\lambda = \gamma = 0$, donc la famille $\{I, J\}$ est libre dans E.

Le système $\{I, J\}$ est à la fois libre et générateur de E, d'où $\{I, J\}$ est une base de E.

2. Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \to a + b$

(a) Montrons que l'application f est linéaire :

i) Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}$ deux éléments de E, on a

$$f(A + B) = f\left(\begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ 0 & a + a' \end{pmatrix}\right) = a + a' + b + b' = (a + b) + (a' + b')$$

donc

$$f(A + B) = f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix}\right) = f(A) + f(B)$$

ii) Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ un élément de E et λ un réel, on a

$$f(\lambda A) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 0 & \lambda a \end{pmatrix}\right) = \lambda a + \lambda b = \lambda(a + b)$$

donc

$$f(\lambda A) = \lambda f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \lambda f(A)$$

D'après i) et ii), on vient de prouver que l'application f est linéaire de E dans $\mathbb{R}$.

(b) Le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de l'application linéaire f : le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f est

$$\mathrm{Ker}(f) = \{A \in E \,/\, f(A) = 0\}$$

on a

$$f(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -a$$

alors $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\begin{pmatrix} a & -a \\ 0 & a \end{pmatrix} \,/\, a \in \mathbb{R}\right\} = \{\alpha K \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\}$ où $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(f)$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur K, soit

$$\mathrm{Ker}(f) = \overline{\mathrm{vect}\{K\}}\cdot$$

(c) Soit G le supplémentaire de $\mathrm{Ker}f$ dans E, soit $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus G$. Pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ de E, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\alpha & -a+\beta \\ \lambda & a+\gamma \end{pmatrix}$$

donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & a+\alpha \\ b & = & -a+\beta \\ 0 & = & \lambda \\ a & = & a+\gamma \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & a+b \\ \lambda & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

donc G est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $M = \begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où ξ est un nombre réel, soit

$$G = \left\{\begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,/\, \xi \in \mathbb{R}\right\}$$

d'où on a $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus G$.

□

Exercice 4

Soit $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions numérique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère $E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \,/\, \forall x \in \mathbb{R} :\ f(-x) = f(x)\}$ et $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \,/\, \forall x \in \mathbb{R} :\ f(-x) = -f(x)\}$

1. Soit E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
2. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. On pose

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right).$$

Vérifier que $g \in E$ et $h \in F$.

3. en déduire $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = E \oplus F$.

Solution : Soit $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions numérique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère
$E = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \ / \ \forall x \in \mathbb{R} : \ f(-x) = f(x)\}$ et $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \ / \ \forall x \in \mathbb{R} : \ f(-x) = -f(x)\}$

1. Montrons que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$:
   (a) E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, en effet,
      i. La fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée 0, est un élément de E car $0(-x) = 0 = 0(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, donc $E \neq \emptyset$.
      ii. Soit f et g deux éléments de E, alors pour tout x de $\mathbb{R}$ on a
$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$
      donc $h = f + g$ est une fonction paire, d'où $f + g \in E$.
      iii. Soit λ un réel et f un élément de E, alors pour tout x de $\mathbb{R}$ on a
$$(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda f(x) = \lambda(f(x)) = (\lambda f)(x)$$
      donc λf est une fonction paire, d'où $\lambda f \in E$.

   d'après i., ii. et iii., on a E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
   (b) F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, en effet,
      i'. La fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notée 0, est un élément de E car $0(-x) = -0 = -0(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, donc $F \neq \emptyset$.
      ii'. Soit f et g deux éléments de F, alors pour tout x de $\mathbb{R}$ on a
$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x)$$
      donc $h = f + g$ est une fonction impaire, d'où $f + g \in F$.
      iii'. Soit λ un réel et f un élément de E, alors pour tout x de $\mathbb{R}$ on a
$$(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = -\lambda f(x) = -\lambda(f(x)) = (-\lambda f)(x)$$
      donc λf est une fonction impaire, d'où $\lambda f \in F$.

   d'après i'., ii'. et iii'., on a F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
2. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. On pose
$$g(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right).$$
   Vérifions que $g \in E$ et $h \in F$.
   (a) Soit x de $\mathbb{R}$ on a
$$g(-x) = \frac{1}{2}\left(f(-x) + f(-(-x))\right) = \frac{1}{2}\left(f(-x) + f(x)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) = g(x)$$
   donc $g \in E$.

(b) Soit x de $\mathbb{R}$ on a

$$h(-x) = \frac{1}{2}\left(f(-x) - f(-(-x))\right) = \frac{1}{2}\left(f(-x) - f(x)\right) = -\frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) = -h(x)$$

donc $h \in F$.

3. Déduction $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = E \oplus F$:

(a) Soit f dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, on a

$$g(x) + h(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) = \frac{1}{2}\left(2f(x) + 0\right) = f(x)$$

donc $g + h = f$, d'où $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = E + F$.

(b) Soit $f \in E \cap F$, alors $x \in E$ et $x \in F$, donc $f(-x) = f(x)$ et $-f(-x) = f(x)$, donc

$$f(x) + f(x) = f(-x) - f(-x) = (1-1)f(-x) = 0.f(-x) = 0$$

d'où $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $f \equiv 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}$, c'est à dire que $E \cap F \subset \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}\}$; et comme E et F sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, alors $\{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}\} \subset E \cap F$; d'où $E \cap F = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}\}$.

d'après (a) et (b) on a prouvé $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = E \oplus F$.

$\square$

Exercice 5

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique (e_1, e_2) où $e_1(1,0)$ et $e_2(0,1)$:

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x-y, x+y)$.
   (a) Montrer que f est linéaire.
   (b) Écrire la matrice de f relativement à la base (e_1, e_2).
2. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base (e_1, e_2) est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble Img, image de g.

Solution : Considèrons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique (e_1, e_2) où $e_1(1,0)$ et $e_2(0,1)$:

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x-y, x+y)$.
   (a) Montrons que f est linéaire : en effet, soient $X = (x,y)$ et $X' = (x', y')$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
      i) d'abord on a $X + X' = (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned} f(X+X') &= f((x,y)+(x',y')) = f(x+x', y+y') \\ &= (x+x'-y-y', x+x'+y+y') \\ &= (x-y, x+y) + (x'-y', x'+y') \\ &= f(x,y) + f(x',y') \end{aligned}$$

donc $f(X+X') = f(X) + f(X')$.

ii) et on a $\lambda X = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned} f(\lambda X) &= f((\lambda x, \lambda y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda y) \\ &= (\lambda (x-y), \lambda (x+y)) = \lambda (x-y, x+y) \\ &= \lambda f(x, y) \end{aligned}$$

donc $f(\lambda X) = \lambda f(X)$

d'après i) et ii) l'application f est linéaire, soit f un endomorphisme.

(b) Soit $\beta = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, la détermination de la matrice de f relativement à la base β se fait par le calcul suivant

$$f(e_1) = (1-0, 1+0) = (1,1) = (1,0) + (0,1) = 1e_1 + 1e_2$$
$$f(e_2) = (0-1, 0+1) = (-1,1) = -(1,0) + (0,1) = -1e_1 + 1e_2$$

donc la matrice de f relativement à la base $\beta = \{e_1, e_2\}$ est donnée par

$$\mathcal{M}_\beta(f) = \begin{array}{cc} f(e_1) & f(e_2) \\ \end{array}$$
$$\mathcal{M}_\beta(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \end{array}$$

2. Considérons un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ g dont la matrice relativement à la base (e_1, e_2) est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminons l'ensemble $\mathrm{Im}(g)$, image de g : en effet, l'endomorphisme g est déterminer de la façon suivante

$$g(e_1) = 1e_1 - 1e_2$$
$$g(e_2) = 1e_1 - 1e_2$$

soit $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors on a $X = (x, y) = x(1,0) + y(0,1) = x\, e_1 + y\, e_2$; donc

$$\begin{aligned} g(X) &= g(x\, e_1 + y\, e_2) = xg(e_1) + yg(e_2) = x(1e_1 - 1e_2) + y(1e_1 - 1e_2) \\ &= (x+y)\, e_1 - (x+y)\, e_2 \\ &= (x+y)\,(e_1 - e_2) \end{aligned}$$

L'image $\mathrm{Im}(g)$ de l'endomorphisme g est

$$\mathrm{Im}(g) = \{g(x,y) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x+y)\,(e_1 - e_2) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\alpha = x + y$ et $u = e_1 - e_2 = (1, -1)$ le vecteur de $\mathbb{R}^2$, donc

$$\mathrm{Im}(g) = \{\alpha\, u \ / \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

est la droite vectorielle de vecteur directeur $u = e_1 - e_2 = (1, -1)$.
Le noyau de g est

$$\mathrm{Ker}(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ g(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$

or $g(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2} \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)\,(e_1 - e_2)$; alors $x + y = 0$ où bien $e_1 - e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$, comme $e_1 - e_2 \neq 0_{\mathbb{R}^2}$, d'où $\mathrm{Ker}(g)$ est la droite vectorielle du plan $\mathbb{R}^2$ d'équation caractéristique $x + y = 0$.

$\square$

Exercice 6
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On désigne par $\mathrm{id_E}$ l'endomorphisme identique de E.

1. Montrer que p est un projecteur si et seulement si $\mathrm{id_E - p}$ est un projecteur.
2. Soi p un projecteur de E.
   (a) Montrer que $\mathrm{E = Im(p) \oplus ker(p)}$.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im(id_E - p) = ker(p)}$ et $\mathrm{ker(id_E - p) = Im(p)}$
3. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f(\mathrm{ker(p)}) \subseteq \mathrm{ker(p)}$ et $f(\mathrm{Im(p)}) \subseteq \mathrm{Im(p)}$.
   Montrer que $f \circ \mathrm{p} = \mathrm{p} \circ f$.

Solution : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathrm{id_E}$ l'endomorphisme identique de E.

1. Montrons que p est un projecteur si et seulement si $\mathrm{id_E - p}$ est un projecteur :
   $\Rightarrow\rfloor$ Supposons que p est un projecteur sur E, on pose $q = \mathrm{id}_E - p$ et soit $x \in E$, alors

$$\begin{array}{rcl} q^2(x) & = & (\mathrm{id}_E - p) \circ (\mathrm{id}_E - p)(x) \\ & = & (\mathrm{id}_E - p)(x - p(x)) \\ & = & \mathrm{id}_E(x) - \mathrm{id}_E(p(x)) - p(x) + p^2(x) \quad \text{où} \quad p^2 = p \circ p \\ & = & x - p(x) - p(x) + p(x) \qquad \text{car} \quad p^2 = p \\ & = & x - p(x) \\ & = & (\mathrm{id}_E - p)(x) \end{array}$$

   donc $q^2(x) = q(x)$ pour tout $x \in E$; d'où $q^2 = q$, ce qui peouve que $q = \mathrm{id}_E - p$ est un projecteur de E.
   $\Leftarrow\rfloor$ Supposons que $q = \mathrm{id}_E - p$ est un projecteur de E, alors $q^2 = q$; donc $q^2(x) = q(x)$ pour tout $x \in E$, donc

$$\begin{array}{rcl} x - p(x) & = & (\mathrm{id}_E - p) \circ (\mathrm{id}_E - p)(x) \\ & = & \mathrm{id}_E(x) - 2p(x) + p^2(x) \\ & = & x - 2p(x) + p^2(x) \end{array}$$

   donc $(2-1)\mathrm{p}(x) = \mathrm{p}^2(x)$ pour tout $x \in E$; d'où $\mathrm{p}^2 = \mathrm{p}$, ce qui peouve que p est un projecteur de E.
2. Soit p un projecteur de E.
   (a) Montrons que $\mathrm{E = Im(p) \oplus Ker(p)}$: $\mathrm{E = Im(p) \oplus Ker(p)}$ si et seulement si on a à la fois les deux propriétés suivantes
      i) $\mathrm{Im(p) \cap Ker(p)} = \{0_E\}$
      ii) et $\mathrm{E = Im(p) + Ker(p)}$

   *Soit $x \in E$, alors $x = (x - p(x)) + p(x) = y + z$ où $y = x - p(x)$ et $z = p(x)$ on a bien $z = p(x) \in \mathrm{Im(p)}$ et on a aussi

$$\begin{array}{rcl} p(y) & = & p(x - p(x)) \\ & = & p(x) - p^2(x) \\ & = & p(x) - p(x) \qquad \text{car} \quad p^2 = p \\ & = & (1-1)p(x) \end{array}$$

donc $p(y) = 0_E$; d'où $y = x - p(x) \in \mathrm{Ker(p)}$; ce qui prouve la propriété i).
*Soit $x \in \mathrm{Im(p)} \cap \mathrm{Ker(p)}$, alors $x \in \mathrm{Ker(p)}$ et $x \in \mathrm{Im(p)}$,
donc $\mathrm{p}(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = \mathrm{p}(y)$,
d'où $\mathrm{p}(x) = 0_E$ et $\mathrm{p}(x) = \mathrm{p}^2(y) = 0_E = \mathrm{p}(y)$,
or p est linéaire, alors $y = 0_E$ ce qui prouve que $x = \mathrm{p}(y) = \mathrm{p}(0_E) = 0_E$,
d'où $x \in \{0_E\}$ soit $\mathrm{Im(p)} \cap \mathrm{Ker(p)} \subset \{0_E\}$,
comme Im(p) et Ker(p) sont deux espaces vectoriels, alors $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker(p)}$ et $\{0_E\} \subset \mathrm{Im(p)}$, soit $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker(p)} \cap \mathrm{Im(p)}$; d'où $\mathrm{Im(p)} \cap \mathrm{Ker(p)} = \{0_E\}$; ce qui prouve la propriété ii).
D'après i) et ii) il vient la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{Im(p)} \oplus \mathrm{Ker(p)}$.

(b) Montrons que $\mathrm{Im(id_E - p)} = \mathrm{ker(p)}$ et $\mathrm{ker(id_E - p)} = \mathrm{Im(p)}$:
- Montrons que $\mathrm{Im(id_E - p)} = \mathrm{ker(p)}$: soit $y \in \mathrm{Im(id_E - p)}$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = (\mathrm{id_E - p})(x)$; donc $y + \mathrm{p}(x) = x$,
on a $\mathrm{p}(x) \in \mathrm{Im(p)}$ et $\mathrm{p}(y + \mathrm{p}(x)) = \mathrm{p}(x)$, alors $\mathrm{p}(x) = \mathrm{p}(y) + \mathrm{p}^2(x) = \mathrm{p}(y) + \mathrm{p}(x)$, donc $\mathrm{p}(y) = 0_E$, c'est à dire que $y \in \mathrm{Ker(p)}$; d'où $y \in \mathrm{Ker(p)}$, finalement $\mathrm{Im(id_E - p)} \subset \mathrm{Ker(p)}$, ceci d'une part et d'autre soit $y \in \mathrm{Ker(p)}$, alors $\mathrm{p}(y) = 0_E = y - y$;
donc $y = y - \mathrm{p}(y) = (\mathrm{id_E - p})(y)$; d'où $y \in \mathrm{Im(id_E - p)}$; soit $\mathrm{Ker(p)} \subset \mathrm{Im(id_E - p)}$ finalement, il vient $\mathrm{Ker(p)} = \mathrm{Im(id_E - p)}$.
- Montrons que $\mathrm{ker(id_E - p)} = \mathrm{Im(p)}$: on vient de montrer que $\mathrm{Ker(p)} = \mathrm{Im(id_E - p)}$ pour tout projecteur p de E ; alors d'après la question 1. on a p est un projecteur si et seulement si $\mathrm{id_E - p}$ est un projecteur ; donc $\mathrm{Ker(q)} = \mathrm{Im(id_E - q)}$, or pour $\mathrm{q} = \mathrm{id_E - p}$, alors on obtient

$$\mathrm{Ker(id_E - p)} = \mathrm{Im(id_E - id_E + p)} = \mathrm{Im(p)}.$$

3. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $f(\mathrm{ker(p)}) \subseteq \mathrm{ker(p)}$ et $f(\mathrm{Im(p)}) \subseteq \mathrm{Im(p)}$, montrons que $f \circ \mathrm{p} = \mathrm{p} \circ f$: soit $x \in E$, comme $\mathrm{E} = \mathrm{Im(p)} \oplus \mathrm{ker(p)}$, alors $\exists! x_1 \in \mathrm{Im(p)}$, $\exists! x_2 \in \mathrm{Ker(p)}$ tel que $x = x_1 + x_2$; donc on a

$$\begin{aligned} f(\mathrm{p}(x)) &= f(\mathrm{p}(x_1 + x_2)) \\ &= f(\mathrm{p}(x_1)) + f(\mathrm{p}(x_2)) \qquad \text{car p et } f \text{ sont linéaires} \\ &= f(\mathrm{p}(x_1)) \end{aligned}$$

car $f(\mathrm{p}(x_2)) = f(0_E) = 0_E$ puisque $x_2 \in \mathrm{Ker(p)}$.
Et, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(f(x)) &= \mathrm{p}(f(x_1 + x_2)) \\ &= \mathrm{p}(f(x_1) + f(x_2)) \quad \text{car } f \text{ est linéaire} \\ &= \mathrm{p}(f(x_1)) + \mathrm{p}(f(x_2)) \quad \text{car p est linéaire} \end{aligned}$$

or $x_2 \in \mathrm{Ker(p)}$, alors $f(x_2) \in \mathrm{Ker(p)}$ car $f(\mathrm{ker(p)}) \subseteq \mathrm{ker(p)}$; donc $\mathrm{p}(f(x_2)) = 0_E$; d'où $\mathrm{p}(f(x)) = \mathrm{p}(f(x_1))$;
et comme $f(\mathrm{Im(p)}) \subseteq \mathrm{Im(p)}$ alors $f(x_1) \in \mathrm{Im(p)}$, donc $\mathrm{p}(f(x_1)) = f(x_1) = f(\mathrm{p}(x_1))$ puisque ($x_1 \in \mathrm{Im(p)}$ implique $\mathrm{p}(x_1) = x_1$) ;
finalement $f(\mathrm{p}(x)) = \mathrm{p}(f(x))$ pour tout $x \in E$; ce qui prouve que $f \circ \mathrm{p} = \mathrm{p} \circ f$.

$\square$

Exercice 7

Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Que peut-on déduire ?
2. Soit Φ une application de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, qui a une fonction f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ associe la fonction $g = f'' + 2f' + f$.
   (a) Exprimer l'écriture symbolique de l'application Φ, puis montrer que Φ est un homomorphisme d'espaces vectoriels.
   (b) Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(\Phi)$ de Φ. L'application Φ est-elle injective ?
   (c) Le noyau $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est-il de dimension finie ? **Justifier**
   (d) L'application Φ est-elle surjective ? est-elle un isomorphisme d'espaces vectoriels ?

Solution : Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifions que $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$: soit f un élément de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ alors f est deux fois dérivables et f'' est une fonction continue. Or une fonction dérivable est une fonction continue ; d'où $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$; finalement $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est un sous-ensemble de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.
   On en déduit que l'ensemble $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$: en effet,
   - $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ car la fonction nulle est un élément de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
   - Soient f et g deux éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, alors f'' et g'' existent et sont continues ; donc
   $$f''(x) + g''(x) = (f'' + g'')(x) = (f + g)''(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
   soit $(f + g)''$ existe et elle est continue sur $\mathbb{R}$; d'où $f + g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
   - Soient f un élément de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et λ un scalaire réel, alors f'' existe et est continue ; donc
   $$\lambda f''(x) = (\lambda f'')(x) = (\lambda f)''(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
   soit $(\lambda f)''$ existe et elle est continue sur $\mathbb{R}$; d'où $\lambda f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
2. Soit Φ une application de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, qui a une fonction f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ associe la fonction $g = f'' + 2f' + f$.
   (a) L'écriture symbolique de l'application Φ est :
   $\Phi : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}),\ f \longmapsto \Phi(f) = f'' + 2f' + f = g$.
   Montrons que Φ est un homomorphisme d'espaces vectoriels : en effet,
   - L'application Φ est bien définie, en effet, pour tout f dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ la fonction $g = f'' + 2f' + f$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = f''(x) + 2f'(x) + f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$; donc $g = f'' + 2f' + f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ pour tout $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; d'où $\Phi(f) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ pour tout $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
   - Soient f et g deux éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, alors $f + g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
   $$\begin{aligned}\Phi(f+g)(x) &= (f+g)''(x) + 2(f+g)'(x) + (f+g)(x) \\ &= f''(x) + g''(x) + 2f'(x) + 2g'(x) + f(x) + g(x) \\ &= (f''(x) + 2f'(x) + f(x)) + (g''(x) + 2g'(x) + g(x)) \\ &\qquad \text{car } (\mathbb{R}, +) \text{ est un groupe abélien} \\ &= \Phi(f)(x) + \Phi(g)(x)\end{aligned}$$

d'où $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$ pour tout f et g dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

- Soient f un élément de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et λ un scalaire réel, alors $\lambda f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{array}{rcl} \Phi(\lambda f)(x) & = & (\lambda f)''(x) + 2(\lambda f)'(x) + (\lambda f)(x) \\ & = & \lambda f''(x) + 2\lambda f'(x) + \lambda f(x) \\ & = & \lambda (f''(x) + 2f'(x) + f(x)) \\ & = & \lambda \Phi(f)(x) \end{array}$$

d'où $\Phi(\lambda f) = \lambda \Phi(f)$ pour tout f dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et λ dans $\mathbb{R}$.

(b) Déterminons le noyau $\mathrm{Ker}(\Phi)$ de Φ : par défінbition le noyau de Φ est

$$\mathrm{Ker}(\Phi) = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \ / \ \Phi(f) = 0\}$$

or $\Phi(f) = 0$ est l'équation différentielle suivante $f'' + 2f' + f = 0$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$; donc il suffit de déterminer f vérifiant cette équation différentielle. L'équation caractéristique de cette équation différentielle est $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$. Comme l'équation caractéristique admet une racine double $r = -1$, alors la solution de l'équation différentielle est

$$f(x) = (\alpha x + \beta)\, e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

où α et β sont des réels. Finalement, $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $f'' + 2f' + f = 0$, soit

$$\mathrm{Ker}(\Phi) = \{(\alpha x + \beta)\, e^{-x} \ / \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

L'application Φ n'est pas injective, en effet, il suffit de prendre $f_1(x) = (x+1)\, e^{-x}$ et $f_2(x) = (5x+3)\, e^{-x}$, alors f_1 et f_2 vérifient $\Phi(f_1) = \Phi(f_2)$ mais $f_1 \neq f_2$.

(c) Le noyau $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est de dimension finie, en effet, pour tout $f \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ il existe α et β des scalaires réels tels que $f(x) = (\alpha x + \beta)\, e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; donc on a

$$f(x) = \alpha\, (x\, e^{-x}) + \beta\, (e^{-x})$$

donc le système $\{e^{-x} \, ; \, x\, e^{-x}\}$ engendre $\mathrm{Ker}(\Phi)$.
Le système $\{e^{-x} \, ; \, x\, e^{-x}\}$ est libre, en effet, soit α et β des scalaires réels tels que $(\alpha x + \beta)\, e^{-x} = 0$; comme $e^{-x} \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $\alpha x + \beta = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$ puisque $\{1, x\}$ est libre ; d'où le système $\{e^{-x} \, ; \, x\, e^{-x}\}$ est libre.
Le système $\{e^{-x} \, ; x\, e^{-x}\}$ est libre et engendre $\mathrm{Ker}(\Phi)$, alors le système $\{e^{-x} \, ; \, x\, e^{-x}\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(\Phi)$; d'où $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est de dimension finie, soit

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\Phi)) = 2.$$

(d) L'application Φ n'est pas surjective, en effet, l'image $\mathrm{Im}(\Phi)$ de Φ est

$$\mathrm{Im}(\Phi) = \Phi(\mathcal{C}^2(\mathbb{R})) = \{g = f'' + 2f' + f \ / \ f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})\}$$

qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$; **mais** on peut trouver des éléments $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ qui ne s'écrivent pas sous la forme $\Phi(f)$. Pour cela, il suffit de prendre les fonctions continues par morceaux.
L'application Φ n'est ni injective ni surjective, alors Φ n'est pas un isomorphisme d'espaces vectoriels.

□

Exercice 8
Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}^2,\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$.
   Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, puis en déduire la dimension de E.
3. On considère l'équation :
   $$(\mathcal{Q}) \ : \quad x^2 - ax - b = 0$$
   Montrer que si l'équation $(\mathcal{Q})$ admet deux solutions complexes z_1 et z_2, alors les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de E avec
   $$\alpha_n = \frac{1}{2}(z_1^n + z_2^n) \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z_1^n - z_2^n)$$
4. **Application** : Déterminer u_n en fonction de n dans le cas suivant :
   $$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n, \quad u_0 = 1, \quad u_1 = 2.$$

Solution : Soit $\mathscr{S} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, u_n \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$ l'espace vectoriel des suites réelles et E l'ensemble donné par

$$E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,/\, u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

1. Montrons que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$: pour cela il suffit de montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}$. Tout d'abord E est un sous-ensemble de $\mathscr{S}$ car tout élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la propriété $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ reste une suite réelle, donc $E \subset \mathscr{S}$.
   (i) La suite $(u_n = 0)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la condition $0 = a.0 + b.0$, alors $E \neq \emptyset$.
   (ii) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E, on a
   $$\begin{aligned} u_{n+2} + v_{n+2} &= a\,u_{n+1} + b\,u_n + a\,v_{n+1} + b\,v_n \\ &= a(u_{n+1} + v_{n+1}) + b(u_n + v_n) \end{aligned}$$
   donc $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément dans E.
   (iii) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
   $$\begin{aligned} \lambda u_{n+2} + v_{n+2} &= \lambda(a\,u_{n+1} + b\,u_n) \\ &= \lambda a u_{n+1} + \lambda b u_n \\ &= a(\lambda u_{n+1}) + b(\lambda u_n) \end{aligned}$$
   donc $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément dans E.

   d'après (i), (ii) et (iii) on a montré que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}$; ce qui prouve que $(E, +, \times)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $\phi : E \to \mathbb{R}^2,\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_0, u_1)$.

– Montrons que ϕ est un isomorphisme d'espaces vectoriels : l'application ϕ est linéaire, en effet, soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{array}{rcl}\phi(\alpha(u_n)+\beta(v_n)) & = & \phi((\alpha u_n+\beta v_n))\\ & = & (\alpha u_0+\beta v_0,\alpha u_1+\beta v_1)\\ & = & \alpha(u_0,u_1)+\beta(v_0,v_1)\\ & = & \alpha\phi((u_n))+\beta\phi((v_n))\end{array}$$

donc ϕ est linéaire. On peut montrer que ϕ est injective, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\phi((u_n)) = 0_{\mathbb{R}^2}$, alors $(u_0,u_1)=(0,0)$, donc $u_2 = a\,u_1 + b\,u_0 = a.0+b.0 = 0$;
puis on montre par récurrence que $((u_n=0))_{n\in\mathbb{N}}$, d'où $\mathrm{Ker}(\phi)=\{(0)_{n\in\mathbb{N}}\}$, ceci d'une part et d'autre ϕ est surjective car les termes u_0 et u_1 d'une suite réelle de type $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existent, ce qui fait que par construction ϕ est surjective. Finalement, ϕ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

– La dimension de E : on a E et $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes via ϕ et comme $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)=2$, alors $\dim_{\mathbb{R}}(E)=2$.

3. Soit l'équation :
$$(\mathcal{Q})\ :\quad x^2-ax-b=0$$
Supposons que l'équation $(\mathcal{Q})$ admet deux solutions complexes z_1 et z_2, montrons que le système
$\{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}},(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ forme une base de E avec $\alpha_n=\frac{1}{2}(z_1^n+z_2^n)$ et $\beta_n=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z_1^n-z_2^n)$.
Comme $\dim_{\mathbb{R}}(E)=2$, alors il suffit de montrer que le système $\{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}},(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ est libre de E.
Soit λ et γ deux réels tels que $\lambda\alpha_n+\gamma\beta_n=0$, alors
– pour $n=0$ et $n=1$ on a
$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda\alpha_0+\gamma\beta_0 & = & 0\\ \lambda\alpha_1+\gamma\beta_1 & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\lambda+\gamma.0 & = & 0\\ \lambda\frac{1}{2}(z_1+z_2)+\gamma\frac{1}{2\mathrm{i}}(z_1-z_2) & = & 0\end{array}\right.$$
donc $\lambda=0$ et d'où $\gamma=0$ puisque $z_1\neq z_2$.
– Par récurrence sur n, on a $\lambda\alpha_n+\gamma\beta_n=0$ entraine $\lambda=\gamma=0$.
ce qui prouve que la famille $\{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}},(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ est libre et donc $\{(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}},(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ est une base de E.

4. **Application** : soit à déterminer u_n en fonction de n dans le cas où $u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n,\ u_0=1,\ u_1=2$. L'équation $(\mathcal{Q})$ est alors $x^2-2x+2=0$ dont le discriminant $\triangle=b^2-4ac=2^2-4\times2\times1=-4=(2\mathrm{i})^2$, les solutions sont alors $z_1=1+\mathrm{i}$ et $z_2=\overline{z_1}=1-\mathrm{i}$.
On écrit $z_1=\sqrt{2}\,(\cos(\frac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4}))$ et $z_2=\sqrt{2}\,(\cos(\frac{\pi}{4})-\mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{4}))$.
Et, par suite on a $u_n\in E$ alors $u_n=\lambda\alpha^n+\gamma\beta^n$ est une combinaison linéaire unique, donc
$$u_n=\lambda\mathrm{Re}(z_1^n)+\gamma\mathrm{Im}(z_1^n)=(\sqrt{2})^n\left(\lambda\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)+\gamma\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$
– pour $n=0$, alors on a $u_0=\lambda$,
– pour $n=1$, alors on a $u_1=\sqrt{2}\left(\lambda\frac{\sqrt{2}}{2}+\gamma\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
donc $\lambda=\gamma=1$ ainsi on a $u_n=(\sqrt{2})^n\,(\cos(\frac{n\pi}{4})+\sin(\frac{n\pi}{4}))$.

$\square$